第２講　２次方程式・２次関数(2)

1　a を実数の定数とする．放物線 $y=x^2-ax+a$ が x 軸の $1 \leqq x \leqq 2$ または $3 \leqq x \leqq 4$ を満たす部分と 2 つの異なる共有点をもつための a の条件を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　以下の条件を満たす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ.

(1)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数 y が存在する.

(2)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たす正の実数 y が存在しない.

(3)　すべての実数 y に対して $x^2+xy+y^2>x+y$ が成り立つ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ここで，a，b，c は $a<b<c$ を満たす実数とする．

(1)　方程式 $f(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，a，b，c，α，β の大小関係を調べよ．

(2)　$(\beta-\alpha)^2$ を a，b，c で表せ．

(3)　$b-a$ と $c-b$ の小さくない方の値を M とする．$\dfrac{\beta-\alpha}{M}$ の最大値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　2次方程式・2次関数(2)

2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつような定数 a の範囲は　$a \leqq$ ［ア］，［イ］$\leqq a$ である．

$f(x)=2x^2-2ax+a$ とおくと，

$a \leqq$ ［ア］のとき　$f(0)=$［ウ］$\leqq 0$　　［イ］$\leqq a$ のとき　軸 $x=\dfrac{［エ］}{［オ］} \geqq 1$

である．よって $f(x)=0$ が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になる．

(2)　この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ に少なくとも1つの実数解をもつような定数 a の範囲は

$a \leqq$ ［カ］，$\dfrac{［キ］}{［ク］} < a$　である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　2次方程式・2次関数(2)

> **1**　a を実数の定数とする．放物線 $y=x^2-ax+a$ が x 軸の $1\leqq x\leqq 2$ または $3\leqq x\leqq 4$ を満たす部分と2つの異なる共有点をもつための a の条件を求めよ．

$f(x)=x^2-ax+a$ とおくと　軸：$x=\dfrac{a}{2}$　グラフは下に凸の放物線．

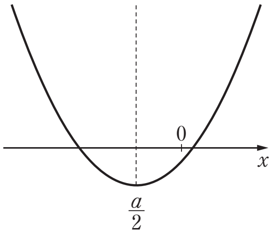
$f(1)=1>0$

$f(2)=4-a$　　$f(3)=9-2a$　　$f(4)=16-3a$

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と異なる2点で交わるためには，

判別式　$D=a^2-4a>0$

$a(a-4)>0$　ゆえに　$a<0,\ 4<a$　であることが必要．



(i)　$a<0$ のとき　軸：$x=\dfrac{a}{2}<0$

よって，x 軸と $x<0$ の範囲に交点をもち，題意を満たさず不適．

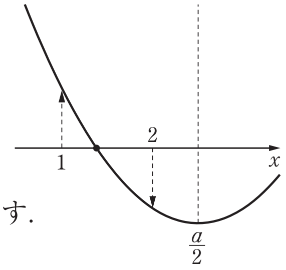
(ii)　$4<a$ のとき

軸：$x=\dfrac{a}{2}>2$　　$f(2)=4-a<0$

よって，$1\leqq x\leqq 2$ において x 軸とただ1つの交点をもつ．

したがって，題意を満たすのは

$f(3)=9-2a\leqq 0$　かつ　$f(4)=16-3a\geqq 0$　のときである．



$\dfrac{9}{2}\leqq a$　かつ　$a\leqq\dfrac{16}{3}$　より　$\dfrac{9}{2}\leqq a\leqq\dfrac{16}{3}$　これは $4<a$ を満たす．

(i)，(ii)より，求める a の条件は　$\boldsymbol{\dfrac{9}{2}\leqq a\leqq\dfrac{16}{3}}$

> **2**　以下の条件を満たす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ．
>
> (1)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数 y が存在する．
>
> (2)　$x^2+xy+y^2=1$ を満たす正の実数 y が存在しない．
>
> (3)　すべての実数 y に対して $x^2+xy+y^2>x+y$ が成り立つ．

(1)　$x^2+xy+y^2=1$　より　$y^2+xy+x^2-1=0$

これを満たす実数 y が存在するのは

判別式　$D_1=x^2-4(x^2-1)\geqq 0$　のとき

$x^2\leqq\dfrac{4}{3}$　　よって　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f(y)=y^2+xy+x^2-1=\left(y+\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x^2-1$ とおくと　軸：$y=-\dfrac{x}{2}$

$f(y)=0$ を満たす正の実数 y が存在しないのは

(i)　実数解が存在しない　　(ii)　実数解が $y\leqq 0$ にのみ存在する

のいずれかである.

(i)のとき　(1)より　$x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x$

(ii)のとき　軸 $y=-\dfrac{x}{2}\leqq 0$　より　$x\geqq 0$

$f(0)=x^2-1\geqq 0$　より　$x\leqq -1$，$1\leqq x$

$D_1\geqq 0$　より　$-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leqq x\leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって　$1\leqq x\leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(i)，(ii)より　$\boldsymbol{x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$**，**$\boldsymbol{1\leqq x}$

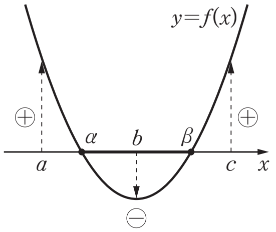
(3)　$x^2+xy+y^2>x+y$　より　$y^2+(x-1)y+x^2-x>0$

これがすべての実数 y で成り立つのは，判別式　$D_2=(x-1)^2-4(x^2-x)<0$　のとき

$(x-1)\{(x-1)-4x\}<0$　　$(x-1)(3x+1)>0$　　よって　$\boldsymbol{x<-\dfrac{1}{3}}$**，**$\boldsymbol{1<x}$

> **3**　関数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ について，次の問いに答えよ．ここで，a，b，c は $a<b<c$ を満たす実数とする．
>
> (1)　方程式 $f(x)=0$ の解を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，a，b，c，α，β の大小関係を調べよ．
>
> (2)　$(\beta-\alpha)^2$ を a，b，c で表せ．
>
> (3)　$b-a$ と $c-b$ の小さくない方の値を M とする．$\dfrac{\beta-\alpha}{M}$ の最大値を求めよ．

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数は 3 より，グラフは下に凸の放物線.



また，$a<b<c$ より

$f(a)=(a-b)(a-c)>0$

$f(b)=(b-c)(b-a)<0$

$f(c)=(c-a)(c-b)>0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図．したがって　$\boldsymbol{a<\alpha<b<\beta<c}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$f(x)=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca$

よって，$f(x)=0$ において，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2}{3}(a+b+c)\qquad \alpha\beta=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$$

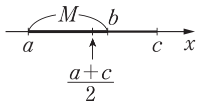
このとき　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

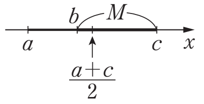
$$=\frac{4}{9}(a+b+c)^2-\frac{4}{3}(ab+bc+ca)$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$$

(3)　$M=\max\{b-a,\ c-b\}$

$$=\begin{cases} b-a & \left(b-a\geqq c-b \text{　つまり　} b\geqq\dfrac{a+c}{2}\text{ のとき}\right) \\ c-b & \left(b-a\leqq c-b \text{　つまり　} b\leqq\dfrac{a+c}{2}\text{ のとき}\right)\end{cases}$$





よって　$0<b-a\leqq M$　……①　$0<c-b\leqq M$　……②　である．

これらの等号が同時に成り立つのは　$b=\dfrac{a+c}{2}$　のときである．

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{M^2}=\frac{4}{9M^2}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{2}{9M^2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

①，②より　$c-a=(b-a)+(c-b)\leqq M+M=2M$

つまり　$0<c-a\leqq 2M$　……③　$\left(\text{等号成立は　} b=\dfrac{a+c}{2}\text{　のとき}\right)$

①～③より

$$\frac{(\beta-\alpha)^2}{M^2}\leqq\frac{2}{9M^2}(M^2+M^2+4M^2)=\frac{4}{3}$$

等号成立は　$b=\dfrac{a+c}{2}$　のとき．

$\dfrac{\beta-\alpha}{M}>0$　より　$\dfrac{\beta-\alpha}{M}\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　　したがって，求める最大値は　$\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　２次方程式・２次関数(2)

２次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1)　この方程式が実数解をもつような定数 a の範囲は　$a \leqq$ [ア]，[イ] $\leqq a$ である．

$f(x)=2x^2-2ax+a$ とおくと，

$a \leqq$ [ア] のとき　$f(0)=$ [ウ] $\leqq 0$　　[イ] $\leqq a$ のとき　軸 $x=\dfrac{[エ]}{[オ]} \geqq 1$

である．よって $f(x)=0$ が実数解をもつとき，少なくとも１つの解は０以上になる．

(2)　この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ に少なくとも１つの実数解をもつような定数 a の範囲は

$a \leqq$ [カ]，$\dfrac{[キ]}{[ク]} < a$　である．

(1)　$2x^2-2ax+a=0$　……①　が実数解をもつのは，判別式 D について

$\dfrac{D}{4}=a^2-2a \geqq 0$　のとき

$a(a-2) \geqq 0$　　よって　$a \leqq \mathbf{0}$，$\mathbf{2} \leqq a$

$a \leqq \mathbf{0}$ のとき　$f(0)=\boldsymbol{a} \leqq 0$

したがって，①は $x \leqq 0$，$0 \leqq x$ に１解ずつもつ（$a=0$ のときは $x=0$ を重解にもつ）

$\mathbf{2} \leqq a$ のとき　軸 $x=\dfrac{\boldsymbol{a}}{\mathbf{2}} \geqq 1$　$f(1)=2-a \leqq 0$

したがって，①は $x \leqq 1$，$1 \leqq x$ に１解ずつもつ　（$a=2$ のときは $x=1$ を重解にもつ）

よって，$f(x)=0$ が実数解をもつとき，少なくとも１つの解は０以上になる．

(2)　①が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ に少なくとも１つの実数解をもつためには，(1)より $a \leqq 0$，$2 \leqq a$ である

ことが必要である．

$a \leqq 0$ のとき　$f(0) \leqq 0$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}=\dfrac{8-3a}{9}>0$　　よって題意を満たす．

$a \geqq 2$ のとき　(軸) $\geqq 1$ である．よって，$f(0) \geqq 0$　かつ　$f\left(\dfrac{2}{3}\right)<0$　であればよい．

$f(0)=a \geqq 2>0$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{9}-\dfrac{a}{3}<0$　より　$a>\dfrac{8}{3}$

以上より，題意を満たす a の値の範囲は　$a \leqq \mathbf{0}$，$\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}<a$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。